



zu 6.3 Cost-Average Effekt

Kauft man regelmäßig jeweils für einen festen Geldbetrag ein Gut mit schwankendem Preis $X(t)$ so ist der Durchschnitts-Kaufpreis pro Stück durch das harmonische Mittel \bar{x}_H gegeben. Man kann allgemein zeigen, dass \bar{x}_H *immer* kleiner als das arithmetische Mittel \bar{x} des Preises ist.

Klassische Anwendung dieser sogenannten **Cost-Average Effekts** sind Sparpläne: Monatlich kauft man für einen festen Geldbetrag Anteile eines Aktien- oder Indexfonds. Zu fragen ist:

1. Warum ist der mittlere Einstandspreis durch \bar{x}_H und nicht durch \bar{x} gegeben?
2. Gibt es irgendwelche Abschätzungen darüber, um *wieviele* geringer \bar{x}_H gegenüber \bar{x} im Mittel ist, also wie groß denn nun der durchschnittliche "Cost-Average Effekt" ist?

Zu Frage 1

Sei

- X_i der Fondspreis zum Zeitpunkt t_i , $i = 1, \dots, n$,
- $M_i = M/n$ der Einzahlungsbetrag zum Zeitpunkt t_i ,
- $N_i = M_i/X_i$ die zum Zeitpunkt t_i gekauften Anteile (Bruchteile sind möglich),

Zum Zeitpunkt t_n hat man also

$$N = \sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{X_i} = \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$$

Anteile. Man hat also einen durchschnittlichen Einstandspreis von

$$\bar{x}_H = \frac{M}{N} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

erzielt.

Zu Frage 2

(für Interessierte; setzt einige Konzepte voraus, die erst später behandelt werden)

Der Cost-Average-Effekt C_A ist durch die Differenz zwischen dem *arithmetischen* Mittel des Preises und dem mittleren Einstandspreis gegeben:

$$C_A = \bar{x} - \bar{x}_H.$$

Wir spalten zunächst den Preis X auf in das arithmetische Mittel \bar{x} und eine Schwankung $D_i = X_i - \bar{x}$ um dieses Mittel,

$$X_i = \bar{x} + D_i.$$

Die Varianz sei durch $s_x^2 = s_D^2 = s^2$ gegeben. Wir nehmen an, dass die Schwankungen bezogen auf den Mittelwert klein sind, d.h. es soll gelten:

$$\epsilon_i := \frac{D_i}{\bar{x}} \ll 1$$

Damit ist insbesondere auch der Variationskoeffizient $V_x = \sigma/\bar{x} \ll 1$. Außerdem soll die Abweichung D_i des Preises vom Mittelwert zum Zeitpunkt t_i nicht von der Abweichung D_{i-1} im Zeitschritt davor abhängen (dies kann man ggf. durch “Durchmischen” der einzelnen Zeitpunkte erreichen, vgl. Bemerkungen am Ende dieses Exkurses), so dass sog. Korrelationen (wird in späteren Vorlesungen erklärt) verschwinden:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j, j \neq i} D_i D_j = 0 \quad (1)$$

Nun versuchen wir, \bar{x}_H angenähert durch das arithmetische Mittel auszudrücken:

$$\begin{aligned} \bar{x}_H &= \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{x} + D_i}} \\ &= \bar{x} \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \epsilon_i}} \end{aligned}$$

Nun soll nach Voraussetzung $|\epsilon_i| \ll 1$ gelten (ansonsten kann man nicht analytisch weiterrechnen): In diesen Falle gilt

$$\frac{1}{1 + \epsilon_i} = 1 - \epsilon_i + \epsilon_i^2 + \mathcal{O}(\epsilon_i^3).$$

Vernachlässigt man alle Terme $\propto \epsilon_i^3$ und höher, erhält man

$$\begin{aligned} \bar{x}_H &\approx \bar{x} \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \epsilon_i + \epsilon_i^2)} \\ &= \bar{x} \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\epsilon_i}{n} - \frac{\epsilon_i^2}{n} \right)} \\ &\approx \bar{x} \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\epsilon_i}{n} - \frac{\epsilon_i^2}{n} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon_i \epsilon_j}{n^2} \right) \\ &= \bar{x} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{\bar{x}^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &\approx \underline{\underline{\bar{x} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\bar{x}^2} \right)}} \end{aligned}$$

Hier wurde berücksichtigt, dass

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = n \frac{\sigma^2}{\bar{x}^2}$$

sowie die Kreuz-Korrelationen verschwinden, vgl. Gl. (??). Außerdem wurde angenommen, dass $n \gg 1$, so dass $1/n^2$ gegenüber $1/n$ vernachlässigt werden kann. Damit erhält man als Ergebnis den Cost-Average Effekt:

$$C_a = \bar{x} - \bar{x}_H = \frac{\sigma^2}{\bar{x}} \quad (2)$$

Der relative Cost-Average Effekt (prozentualer Effekt) beträgt also gleich dem Variationskoeffizient von X :

$$\frac{C_a}{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{\bar{x}^2} = V_x^2 \quad (3)$$

Der Cost-Average Effekt steigt also mit dem Quadrat des Variationskoeffizienten (dem Quadrat der relativen Standardabweichung) des Kurses X !

Der Variationskoeffizient $V_x = \sigma/\bar{x}$ wird, auf ein Jahr bezogen, auch als “Volatilität” bezeichnet und lässt sich auf Börsenseiten im Internet abfragen.

Beispiel: Auf 1 Jahr bezogen ist die “Volatilität” des DAX bei etwa $V_{\text{DAX}} = \sigma/\bar{x} = 20\%$. (geben Sie auf einer beliebigen Börsen-Website das Kürzel “VDAX” ein). Damit beträgt der relative Cost-Average Effekt

$$\frac{C_A}{\bar{x}} = V_{\text{DAX}}^2 = \underline{\underline{4\%}}.$$

Der mittlere Einstandspreis ist also um 4% niedriger als der mittlere Kurs. Immerhin!

Bei volatilere Fonds (z.B. Biotech) oder längerer Laufzeit (σ^2 ist proportional zur Laufzeit) ist der Effekt größer, aber irgendwann sind die Voraussetzungen dieser Rechnung nicht mehr erfüllt.

Einige Bemerkungen

- Man kann allgemein für beliebige Zufallsgrößen zeigen: Das harmonische Mittel ist **immer** kleiner als das arithmetische.
- Neben der Vermögensplanung ist das harmonische Mittel u.a. bei der Bestimmung der Verkehrsdichte mit Mess-Schleifen wichtig.
- die Preise X_i sind i.A. nicht unabhängig: ist X_i überdurchschnittlich hoch, so ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass auch X_{i+1} hoch ist (für Spezialisten: Die Preise gehorchen einem Markow-Prozess). Nun ändern sich aber weder \bar{x} noch h , wenn wir die Zeitpunkte durcheinandermixen und so die Korrelationen der X_i zerstören, so dass die obigen Betrachtungen unabhängig von eventuellen Korrelationen sind.
- Schwankungen von Aktienkurse sind nur in einem mittleren Zeitfenster angenähert normalverteilt. Für große Zeiträume, in denen σ/\bar{x} nicht mehr $\ll 1$ ist (z.B. beim DAX ab etwa 2 Jahren), sind nicht die Kurse selbst, sondern deren Logarithmen, angenähert normalverteilt. Dann gilt aber auch obige Herleitung nicht mehr. Für kleine Zeiträume (z.B. beim DAX bei weniger als etwa drei Monate), gibt es aufgrund von Crashes und Kaufpaniken mehr Extremwerte (“fat Tails”).