

Zu Abschnitt 6.5(b): Herleitung der “Feinberechnungsformel” für den Modalwert

Wir nehmen *gleiche Klassenbreiten* $\Delta_k = d$ für alle Klassen an und betrachten eine Klasse k' , in der sich ein Modalwert befindet, also $f_{k'}^D > f_{k'-1}^D$ und $f_{k'}^D > f_{k'+1}^D$. Für die Dichtefunktion nehmen wir nun keine Treppenfunktion (übliche Darstellung) und auch keine stückweise lineare Funktion an (Häufigkeitspoygon), sondern eine stückweise quadratische Funktion, welche in jeder Klasse k durch die drei Punkte (x_{k-1}^*, f_{k-1}^D) , (x_k^*, f_k^D) und (x_{k+1}^*, f_{k+1}^D) definiert ist. Mit $d = x_k^o - x_k^u = x_k^* - x_{k-1}^*$, $f_k^D = y_k$ ergibt sich die Dichtefunktion $f(x) = y(x)$ in parabolischer Näherung zu

$$f(x) = y(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{d} \right) (x - x_k^*) - \frac{1}{2} \left(\frac{2y_k - y_{k-1} - y_{k+1}}{d^2} \right) (x - x_k^*)^2$$

Der Modalwert x^D ist nun die Stelle, an der die erste Ableitung gleich Null ist (die zweite ist für $k = k'$ automatisch negativ):

$$y'(x^D) = 0 \Rightarrow x^D = x_{k'}^* + \frac{(y_{k'+1} - y_{k'-1})d}{2(2y_{k'} - y_{k'-1} - y_{k'+1})}$$

Mit $x_{k'}^* = x_{k'}^u + \frac{d}{2}$ lässt sich dies umformen zu

$$x_D = x_{k'}^u + \frac{y_{k'} - y_{k'-1}}{2y_{k'} - y_{k'-1} - y_{k'+1}} d,$$

also der Formel im Skript, wenn man $y_k = f_k^D$ und $d = \Delta x_{k'}$ setzt.

Hinweis: Die Herleitung gilt eigentlich nur für identische Klassenbreiten, die Formel wird aber mit guten Ergebnissen auch für unterschiedliche Klassenbreiten angewandt; nur bei Dichtemaxima in den Randklassen versagt sie, da dann die Annahme endlicher Dichten in beiden Nachbarklassen nicht zutreffen kann.