



Rendite und Risiko bei Finanzanlagen: Was die Statistik erklärt

Um was geht es?

Bekommt man plötzlich eine Erbschaft vom sprichwörtlichen "reichen Onkel" und will das Geld anlegen, steht man vor einem klassischen Dilemma: Legt man mit geringen oder keinem Risiko an (Sparbuch, Bundesanleihen, Geldmarktfonds), erwarten einen geringe jährliche prozentuale Gewinne, d.h. eine geringe "Rendite". Will man dagegen mit höherer Renditechance anlegen, z.B. in Aktien oder Aktienfonds, muss man dies mit wachsendem Risiko "bezahlen", wie gerade die letzten Jahre gezeigt haben (*sic*).

Kann man nun die zunächst schwammigen Begriffe ("Renditechance", "Risiko") konkretisieren und damit auch den "Preis", den man für höhere Renditeerwartung bezahlen muss? Es zeigt sich, dass dies im Rahmen des klassischen Paradigmas der Wirtschaftswissenschaften, nämlich dem des völlig rational handelnden Menschen ("**Homo oeconomicus**"), gelingt und dass die in dieser Statistik-Vorlesung behandelten Begriffe dafür ausreichen! Konkretisiert man nämlich

- die **Renditechance** einer Anlageklasse (z.B. Staatsanleihen aus "Nichtbananenstaaten", Firmenanleihen, Hedgefonds, europäische Aktien großer Firmen, russische Aktien, Derivate ...) als arithmetisches Mittel ("Erwartungswert") der konkreten Einzelrenditen,
- das **Risiko** als Standardabweichung der Einzelrenditen,

so erhält man, wenn man den "*homo oeconomicus*" annimmt, das Ergebnis ("Capital Asset Pricing Model")

$$\frac{\text{Renditechance}}{\text{Risiko}} = \frac{\text{Renditeunterschied zur sicheren Anlage}}{\text{Standardabweichung der Rendite}} = \lambda = \text{const.}$$

William Forsyth Sharpe hat es mit dieser Formel 1990 (!) immerhin bis zum Nobelpreis geschafft.

Herleitung

Wir betrachten die Statistik der Wertschwankungen zweier Geldanlagen (“Portfolios”) 1 und 2 aus verschiedenen Anlageklassen in einem gewissen Zeitraum von z. B. einem Jahr. Konkret vergleichen wir für diesen Zeitraum die Mittelwerte r_1 , r_2 der Renditen der beiden Portfolios sowie die Variationskoeffizienten V_1 , V_2 der Wertentwicklung, d.h. die Standardabweichungen der Renditen.¹

- Das **erste Portfolio** P_1 besteht nur aus einem einzigen Wertpapier (anfänglicher Wert X) aus einer Anlageklasse mittleren Risikos mit erwarteter Rendite r_x und Varianz σ_x^2 (z.B. europäische Standardaktie oder ein entsprechender Fonds). Nach dem betrachteten Zeitraum ist der

- Mittelwert μ_1 des Portfoliowertes gleich

$$\mu_1 = (1 + r_x)X$$

mit r_x der erwarteten Rendite von X ,

- und die Varianz² beträgt

$$\sigma_1^2 = \sigma_x^2 = V_x^2 X^2,$$

wobei V_x den Variationskoeffizient der Wertentwicklung bezeichnet.

- Das **zweite Portfolio** P_2 hat einen Wertanteil α in eine sehr schwankungsreiche Aktie Y (mit einem Variationskoeffizient $V_y = \sigma_y/Y$, der größer als der der Aktie X ist) angelegt, sowie einen Restanteil $(1 - \alpha)$ in Bundesanleihen B , welche einen sicheren Zins von r_0 bringen und kein Risiko besitzen, also $\sigma_B^2 = 0$. Nach dem betrachteten Zeitraum ist der

¹Sie wissen natürlich noch aus der Vorlesungsstunde über Lagemaße, dass für Wachstumsprozesse (um die es sich hier ja hoffentlich handelt ;-)) das geometrische Mittel und nicht das arithmetische Mittel angemessen ist und das man die Überlegungen deshalb für die *Logarithmen* der relativen Wertänderungen und nicht für die relativen Wertänderungen selbst machen sollte, da für die Logarithmen ja dann wieder das arithmetische Mittel gilt. Konsequenterweise ist die Rendite, streng genommen, als Logarithmus $\ln(1 + r)$ der jährlichen relativen Wertänderung und nicht als r selbst definiert. Falls die relativen Wertänderungen jedoch $\ll 1$ sind, gibt es zwischen relativen Schwankungen und den Logarithmen kaum Unterschiede, da $\ln(1 + r) \approx r$ für $r \ll 1$. Der Einfachheit halber (ich weiß dass Logarithmen abschrecken!) betrachten wir hinreichend kleine Zeiträume, so dass r_1 und $r_2 \ll 1$ und rechnen mit den relativen Wertänderungen direkt.

²Es handelt sich hier um die *echte* Varianz, die zur Unterscheidung zu der aus Daten ermittelten mit σ^2 und nicht mit s^2 bezeichnet wird.

– Mittelwert

$$\mu_2 = \alpha(1 + r_Y)Y + (1 - \alpha)(1 + r_0)B,$$

– und die Varianz beträgt wegen der verschwindenden Varianz der Bundesanleihe

$$\sigma_1^2 = \alpha^2 V_y^2 Y^2.$$

(Im Allgemeinen ist die Varianz einer Summe die Summe der Einzelvarianzen und aller Korrelationskoeffizienten, vgl. den

[Exkurs zur Markowitz-Theorie](#))

Wie auch immer, der "Preis" einer Renditechance-Erhöhung ist, auf jedem Fall sollte für den "*Homo oeconomicus*" gelten, dass eine Anlage mit gleicher Renditechance auch das gleiche Risiko beinhaltet. Wäre dem nicht so, würde er ja die mit dem geringeren Risiko kaufen, wodurch sich aufgrund Angebot und Nachfrage der Preis dieser Anlage und damit das Risiko erhöht, bis es angeglichen ist.

Dieses Prinzip auf unsere beiden Portfolios angewandt, ergibt die Aussage: "Sind die mittlere Renditen $r_1 = \mu_1/P_1 - 1$ und $r_2 = \mu_2/P_2 - 1$ des jeweiligen Portfolios gleich, so sollten auch die Variationskoeffizienten $V_1 = \sigma_1/P_1$ und $V_2 = \sigma_2/P_2$ gleich sein, also

$$\frac{\mu_1}{P_1} = \frac{\mu_2}{P_2} \Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{P_1} = \frac{\sigma_2}{P_2} \quad (1)$$

Nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass X , Y und B gleich groß sind (d.h. die Aktien X und Y sowie die Bundesanleihen könnten z.B. einheitlich 100 € kosten), so ist $P_1 = P_2 = X$. Damit ergibt

- die Gleichheit der Variationskoeffizienten:

$$V_x = \alpha V_y \quad (2)$$

- und die Gleichheit der Renditen:

$$r_x = \alpha r_Y + (1 - \alpha)r_0 \quad (3)$$

Aus Gl. (2) folgt zunächst ein Anteil $\alpha = V_x/V_Y$ von risikoreichen Aktien im Portfolio P_2 . Dies eingesetzt in Gl. (3) ergibt

$$r_x = \frac{V_x}{V_y} r_y + \left(1 - \frac{V_x}{V_y}\right) r_0$$

oder

$$\frac{r_x - r_0}{V_x} = \frac{r_y - r_0}{V_y} = \lambda \quad (4)$$

Dies ist, in Formeln ausgedrückt, das schon in der Einleitung angesprochene Ergebnis "Höhere Durchschnittsrendite gleich höherem Risiko" Der Proportionalfaktor

$$\lambda = \frac{\text{Renditeerhöhung}}{\text{Variationskoeffizient der Wertentwicklung}} \quad (5)$$

heißt **Sharpe-Ratio**. Sein Wert kann aus der Portfoliotheorie *nicht* festgelegt werden. Er sollte aber für *alle* (!!) Finanzanlagen, egal wie sicher oder risikoreich, derselbe sein. Zumindest, wenn die Annahmen dieser Überlegungen zutreffen. Da wir aber nicht nur *homines oeconomici* befragen, gibt es tatsächlich Unterschiede. Dadurch wird das Sharpe-Ratio aber zu einen der aussagekräftigsten Leistungskennzahlen von Fonds: Egal wie risikoreich: Rentenfonds, Aktienfonds, Hedgefonds etc, alles kann mit dem Sharpe-Ratio miteinander verglichen werden! Hebelt man das Investment durch Kredite, Futures oder Turbozertifikate, ändert sich dadurch das Sharpe-Ratio ebenfalls *nicht*! Ein Wert $\lambda = 0$ heißt: Dieses Investment hat Schwankungen, aber keine höhere Rendite als eine sichere Anleihe: schlecht! Wirklich gut sind Werte von $\lambda \geq 1$.

Ein Problem gibt es bei der Auswahl von Geldanlagen mit dem Kriterium des Sharpe-Ratios (wie übrigens mit jedem anderen Auswahlkriterium) allerdings, und zwar das der sog. "Nichtstationarität" der Kursentwicklungen. Das heißt hier, dass der notwendigerweise in der Vergangenheit ermittelte Wert von λ nicht notwendigerweise mit dem für uns interessanten, in der Zukunft liegenden Zeitraum übereinstimmt (und auch schwierig bis unmöglich mit der induktiven Statistik, vgl. nächstes Semester, abgeschätzt werden kann). Wie sagen doch alle Fondsanbieter und Berater so schön: "In der Vergangenheit erzielte Ergebnisse stellen keine Garantie für den zukünftigen Wertverlauf dar".