Zu 15.3: Korrelationen: Portfoliotheorie von Markowitz

Gegeben sind zwei Wertpapiere A und B (z.B die Siemens- und die DaimlerChrysler-Aktie oder die Siemens-Aktie und eine Anleihe). Wir betrachten nun die relative Wertänderungen $X = (W_A(t+\tau) - W_A(t))/W_A(t)$ und $Y = (W_B(t+\tau) - W_B(t))/W_B(t)$ der Wertpapiere A und B innerhalb eines festen Zeitraums von z.B. $\tau = 1$ Jahr. Für n solcher Zeiträume, z.B. die letzten n Jahre, ergeben sich die (arithmetischen) Mittelwerte der Wertänderungen wie üblich:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 + r_x, \\ \bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = 1 + r_y, \end{aligned}$$

sowie analog die Varianzen s_x und s_y und die Korrelation r_{xy}. Für $\tau = 1$ Jahr haben r_x und r_y die Bedeutung der historischen mittleren Renditen . Die Variationskoeffizienten $V_x = s_x/\bar{x}$ und $V_y = s_y/\bar{y}$ werden auch als "historische Volatilitäten" bezeichnet.

Da es immer besser ist, "mehrere Eisen im Feuer zu haben", untersuchen wir ein "Portfolio" (eine Zusammenstellung von Wertpapieren)

$$Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y,$$

bei dem Aktie A einen wertmäßigen Anteil α und Wertpapier B den Restanteil $(1-\alpha)$ ausmacht und wollen den Anteil α bestimmen, der das Risiko minimiert, wobei das "Risiko" durch die Varianz σ_z charakterisiert sein soll. (vgl. auch Exkurs zum Rendite-Risiko-Verhältnis)

(a) Wie groß ist der Mittelwert $\bar{z}$ bzw. die mittlere Portfoliorendite $r_z = \bar{z} - 1$ als Funktion des Anteils α

(b) Wie groß ist die Standardabweichung $s_z(\alpha)$ der Schwankungen des Portfolios?

(c) Es sei nun X die Siemens-Aktie mit der historischen Rendite von 5.4% und Volatilität $s_x = 52\%$ und Y die BMW-Aktie mit $r_y = 13\%$ und $s_y = 38\%$. Ferner haben die Wertschwankungen der beiden Aktien eine Korrelation von 60%. Mit welchen Wertanteil an Siemens-Aktien optimiert, d.h. minimiert man die Schwankungsintensität s_z des Portfolios? (Lösung: $\alpha = 0.145$) Wie ist dann die mittelre Rendite? Wie sähe das Ergebnis bei Korrelation von 0, 1 oder -1 aus?

(d) Zeichnen Sie $r_z(\alpha)$ und $s_z(\alpha)$ für den Fall $r_{xy} = 0, 1, -1$ sowie $r_{xy} = 0.6$ in ein Rendite-Streuungs-Diagramm!

Lösung

(a) Für den Mittelwert gilt die Additivität:

$$\overline{aX + bY} = a\bar{x} + b\bar{y}$$

also hier:

$$\bar{z} = \alpha\bar{x} + (1-\alpha)\bar{y} = \alpha(1+r_x) + (1-\alpha)(1+r_y) = 1 + \alpha r_x + (1-\alpha)r_y,$$

also für die mittlere Portfolio-Rendite

$$r_z(\alpha) = \alpha r_x + (1-\alpha)r_y \tag{1}$$

(b) Für eine Korrelation von 0 hatten wir bereits früher die Additivität der Varianzen hergeleitet. Mit Korrelation gilt dies aber nicht, deshalb Rechnung "zu Fuß", zunächst allgemein für $Z = aX + bY$:

$$\begin{aligned} ns_z^2 &= \sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a(x_i - \bar{x}) + b(y_i - \bar{y}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a(x_i - \bar{x}))^2 + \sum_{i=1}^{n}(b(y_i - \bar{y}))^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(ab(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})) \end{aligned}$$

In den einzelnen Termen erkennen wir nun die Varianzen und Covarianzen:

$$\begin{aligned} s_z^2 &= a^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + b^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 + 2ab\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= a^2 s_x^2 + b^2 s_y^2 + 2ab s_{xy} \end{aligned}$$

und mit $a = \alpha$, $b = (1-\alpha)$ und $s_{xy} = s_x s_y r_{xy}$:

$$s_z^2(\alpha) = \alpha^2 s_x^2 + (1-\alpha)^2 s_y^2 + 2\alpha(1-\alpha)s_x s_y r_{xy} \tag{2}$$

(c) Die Variationskoeffizienten, d.h. die "Volatilitäten", sind durch $V_x = s_x/(1+r_x)$, $V_y = s_y/(1+r_y)$ und $V_z = s_z/(1+r_z)$gegeben. Für kleine r_x und r_y macht man nicht viel falsch, wenn man stattdessen direkt die Standardabweichungen s_x, s_y und s_z gleich den Variationskoeffizienten setzt. [1] Wenn s_z^2 minimal ist, dann auch s_z, so dass wir wie üblich Gl (2) nach α ableiten und nullsetzen können:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}s_z^2 &= \frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^2 s_x^2 + (1-\alpha)^2 s_y^2 + 2\alpha(1-\alpha)s_{xy}\right) \\ &= 2\alpha s_x^2 - 2(1-\alpha)s_y^2 + (2-4\alpha)s_{xy} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

[1] Betrachtet man die Logarithmen der Preis-Schwankungen, was konzeptionell sowieso besser ist, ich hier aber der Einfachheit halber vermieden habe, ist obige Überlegung sogar exakt, wenn man gleichbleibende relative Schwankungen annimmt

also

$$\alpha(s_x^2 + s_y^2 - 2s_xs_yr_{xy}) = s_y^2 - s_xs_yr_{xy}$$

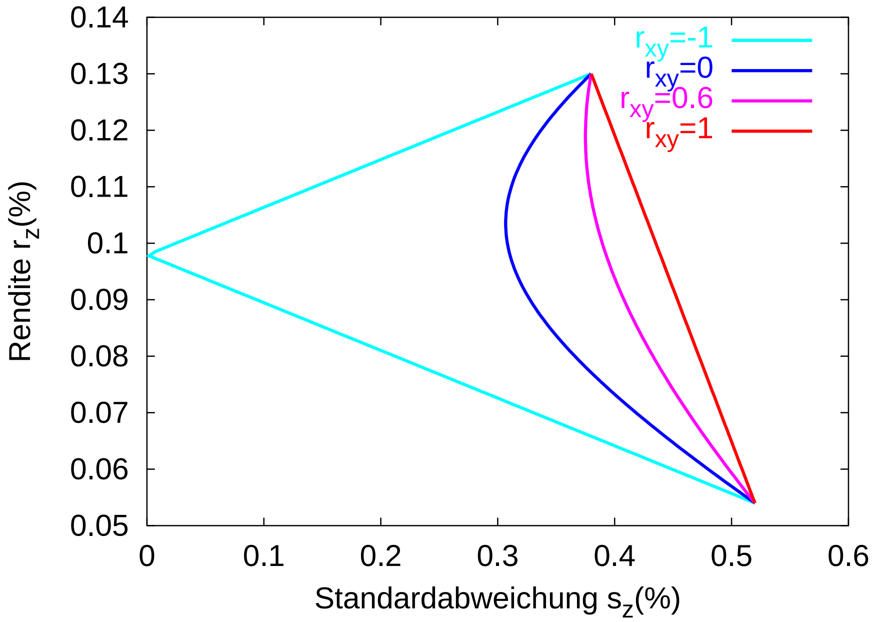
und damit

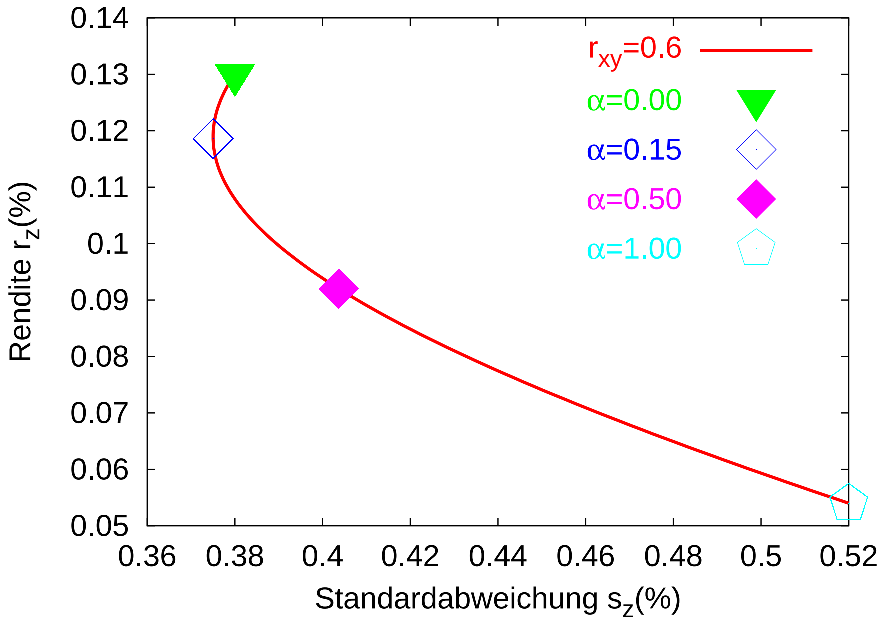
$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{s_y^2 - s_xs_yr_{xy}}{s_x^2 + s_y^2 - 2s_xs_yr_{xy}} \tag{3}$$

Wir setzen nun ein: $s_x \approx V_x = 0.52$, $s_y \approx V_y = 0.38$ und $r_{xy} = 0.6$ und erhalten $\alpha_{\text{opt}} = \underline{\underline{0.146}}$.

Das heißt, ein Anteil von 14.6 % Siemens Aktien und 85.4% BMW-Aktien optimiert das Portfolio hinsichtlich der Schwankungen.

Lösung zu Teilaufgabe (d)





0.14
0.13
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
Rendite r_z(%)
0.36
0.38
0.4
0.42
0.44
0.46
0.48
0.5
0.52
Standardabweichung s_z(%)
r_{xy}=0.6
α=0.00
α=0.15
α=0.50
α=1.00