

## II. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

### 20 Zufall und Wahrscheinlichkeit

#### 20.1. Präzisieren des Begriffs "Zufall"

Ansatzpunkt ist die Vorstellung eines Zufallsexperiments:

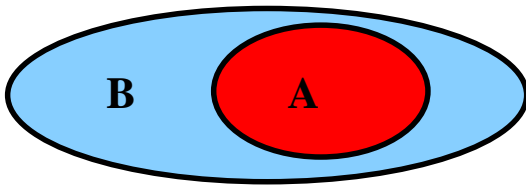
Ein **Zufallsexperiment** ist ein Versuch mit mehreren, "vom Zufall" abhängigen Ausgängen, der -zumindest gedanklich- unter *gleichen Bedingungen* beliebig oft wiederholt werden kann (**Stationaritätskriterium**).

Dabei sind folgende Begriffe wichtig

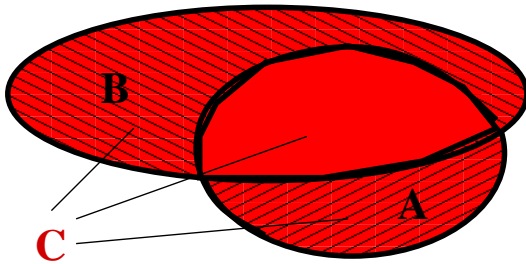
- **Elementarereignis  $E$** : Ein konkretes Resultat eines Zufallsexperiments (z.B. "Werfen einer Vier" beim Zufallsexperiment "Würfeln mit einem Würfel")
- **Ereignis  $A$** : Eine Menge von Elementarereignissen (z.B.  $A = \text{"ungerade"} \Rightarrow A = \{1, 3, 5\}$ )
- **Ereignisraum  $\Omega$** : Menge aller möglichen Ausgänge des Experiments (die Zahlen 1 bis 6)

*Aufgabe:* Erörtern Sie die obigen Begriffe: Zufallsexperiment, Elementarereignis, Ereignis, Ereignisraum anhand der Zahl der an einen bestimmten Tag eingehenden Schadensmeldungen bei einer Kfz-Haftpflichtversicherung.

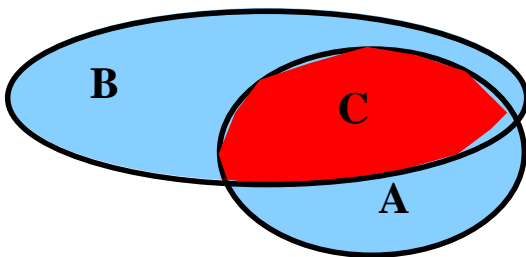
## 20.2 Ereignismengen



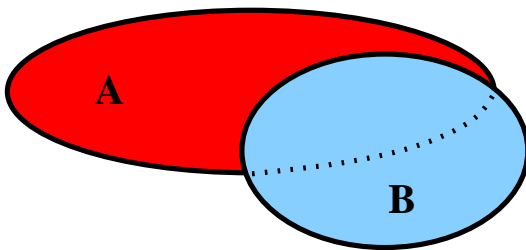
$A \subset B$  sagt aus: "zufälliges Ereignis  $A$  ist logisches Teilereignis von  $B$ "



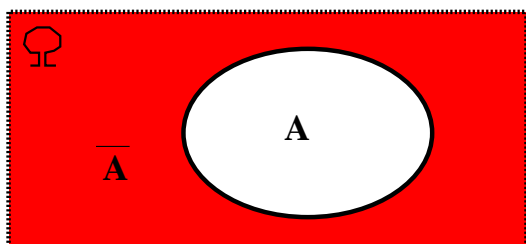
$C = A \cup B$  (logische Summe) sagt aus "Ereignis  $C$  ist eingetreten, falls mindestens eines der Ereignisse  $A$  oder  $B$  eingetreten ist"



$C = A \cap B$  (logische Produkt) sagt aus "Ereignis  $C$  ist eingetreten, falls sowohl Ereignis  $A$  als auch  $B$  eingetreten sind"







$C = A \setminus B$  (logische Differenz) sagt aus "Ereignis  $C$  ist eingetreten, falls  $A$ , aber nicht  $B$  eingetreten sind"



Komplementär-Ereignis  $\bar{A}$  sagt aus "Ereignis  $\bar{A}$  ist eingetreten, falls  $A$  nicht eingetreten ist"

## 20.3 Ereignisalgebra

Wir schließen haarscharf:

- $A \cup \bar{A} = \Omega$   "Es ist sicher ( $\Omega$ ), dass der Verdächtige die Wahrheit sagt ( $A$ ) oder auch nicht ( $\bar{A}$ )."
- $A \cap \bar{A} = \{\emptyset\}$   "Es ist unmöglich ( $\{\emptyset\}$ ), dass der Verdächtige gleichzeitig die Wahrheit sagt und lügt."
- $\bar{\bar{A}} = A$   "Wenn es nicht zutrifft, dass der Verdächtige lügt ( $\bar{A}$ ), dann sagt er die Wahrheit ( $A$ ) und umgekehrt."
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$   "Der erste sagt die Wahrheit, aber nicht der zweite. Also trifft zu, dass der erste die Wahrheit sagt und der zweite lügt."

## 20.3 Ereignisalgebra II

Nützlich sind auch die **De-Morgan'schen Regeln**:

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$



"Wir wissen: Zumindest einer der Verdächtigen lügt ( $\bar{A} \cup \bar{B}$ ). Also trifft es nicht zu, dass beide die Wahrheit sagen ( $\overline{A \cap B}$ )"

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$



"Wir wissen: Beide Verdächtigen lügen. Also trifft es nicht zu, dass zumindest einer die Wahrheit sagt."

*Aufgabe:* Veranschaulichen Sie sich all dies anhand des Zufallsexperiments "Volksbefragung" mit den Ereignissen:  $A$  = "Person ist nicht volljährig" (Alter < 18 Jahre);  $B$  = "Person fährt ein Auto";  $C$  = "Person ist weiblich".

## 20.4 Wahrscheinlichkeit

*Statistik im eigentlichem Sinne beginnt erst da, wo die Zahl der möglichen Fälle unendlich ist*

G. Makenroth in "Methoden der Statistik"

Die **Wahrscheinlichkeit**  $P$  ist eine *Abbildung*, die jedem Ereignis  $A$  eine *reelle Zahl*  $P(A)$  zwischen 0 ("nie") und 1 ("sicher") zuordnet. Es gibt drei Definitionen, die je nach Anwendungsgebiet zum Einsatz kommen:

### 1. Klassische Definition (von Laplace):

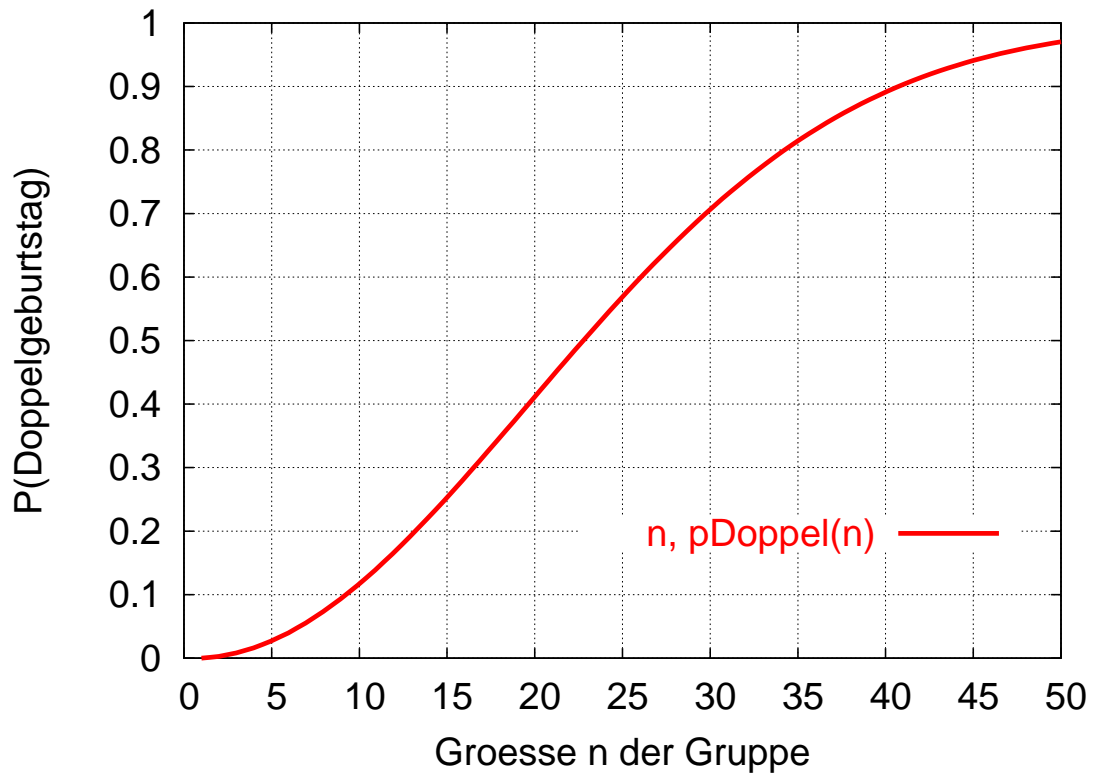
Gibt es als Ausgang eines Zufallsexperiments  $n$  *gleich wahrscheinliche* Elementarereignisse, so ist die **klassische Wahrscheinlichkeit** gegeben durch die relative Häufigkeit

$$P(A) = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl aller Fälle}} = \frac{h(A)}{h(\Omega)} = \frac{h(A)}{n}$$

mit  $h(A)$  der Zahl von Elementarereignissen, die in  $A$  enthalten sind.

*Typische Anwendung und Aufgaben:* Kombinatorik, z.B. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, einen Sechser im 6-aus-49 Lotto zu erreichen, Wahrscheinlichkeit mindestens eines Doppelgeburtstages bei  $n$  Leuten.

# Beispiel: Wahrscheinlichkeit für Doppelgeburtstage



## 20.4 Wahrscheinlichkeit II: Statistische Definition

### 2. Statistische (oder auch empirische) Definition:

Sind die (strengen!) Voraussetzungen der klassischen Definition nicht gegeben oder gar die Elementarereignisse nicht bekannt, kann man die Wahrscheinlichkeit durch häufiges Wiederholen des Zufallsexperiment gewinnen:

Die **statistische Wahrscheinlichkeit**

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(A)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A)$$

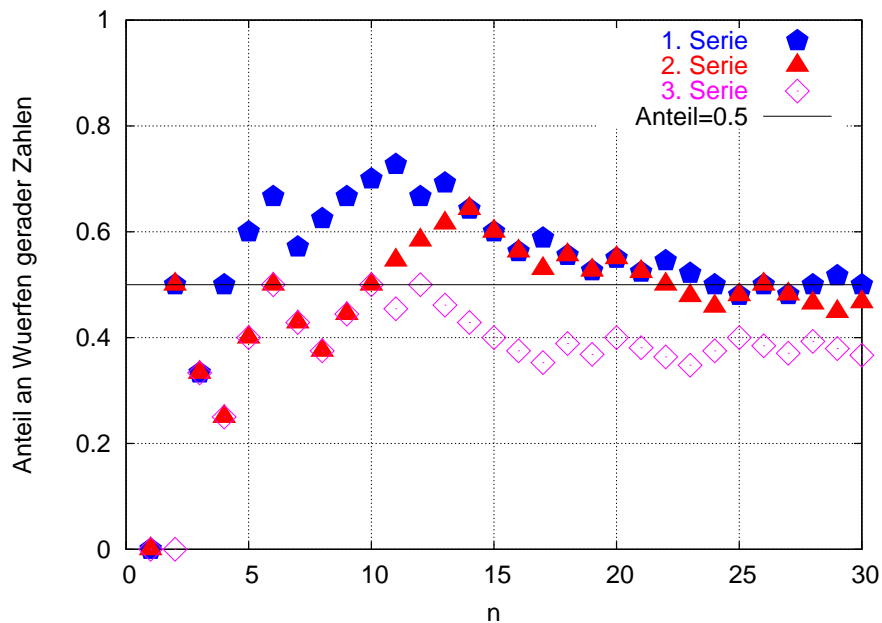
ist der Grenzwert der relativen Häufigkeiten für eine beliebig wachsende Anzahl von Versuchen *unter unveränderten Bedingungen*.

#### Bemerkungen:

- In der Praxis kann man nicht unendlich viele Versuche durchführen und berechnet als Näherung die relative Häufigkeit  $P(A) = h(A)/n$  für großes, aber endliches  $n$ .
- Dabei kommt ein das **Gesetz der großen Zahl** zu Hilfe: *Die statistische Wahrscheinlichkeit ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit bei beliebig vielen Versuchen.*
- Die statistische Definition ist die grundlegende für die gesamte induktive Statistik, d.h. für nahezu den ganzen Rest dieser Vorlesung.

*Aufgabe:* Diskutieren Sie den statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff in Zusammenhang mit Volksbefragungen zur Verkehrsmittelwahl!

## 20.4 Wahrscheinlichkeit II (Forts.)



*Typische Anwendung:* Empirische Bestimmung bei Zufallsexperimenten,

- bei denen keine endliche Zahl gleichwahrscheinlicher Elementarereignisse existiert oder bekannt ist oder deren Behandlung zu aufwändig ist  $\Rightarrow$  Qualitätskontrolle,
- Bei allen durch empirische Umfragen, Stichproben und dergleichen gewonnenen Daten.

## 20.4 Wahrscheinlichkeit III: Subjektive Definition

Die meisten Zufallsprozesse des “realen Lebens” hängen mehr oder weniger kompliziert vom Maß an zur Verfügung stehender Information (d.h. von der *Person!*) sowie von der *Zeit* ab. Damit sind die Voraussetzungen der bisherigen Definitionen nicht gegeben und man muss auf eine **subjektive Beurteilung** zurückgreifen, die auf einen Konsens der betroffenen Personen beruht.

*Beispiele:* Alle Arten von Entscheidungstheorie und -findung

Bemerkenswert genau ist eine quantitative Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit, wenn man ihn auf einen **Marktmechanismus** abbildet:

- Für Pferdewetten und Fußball-Ergebnisse gibt es *Wettbüros*
- Gegen Regen bei der nächsten Grillparty kann man an Terminbörsen *Wetterderivate* erwerben, die im Regenfall zum Erhalt eines festen Geldbetrag berechtigen,
- Vor Wahlen gibt es Handel (mit echtem Geld!) mit *virtuellen* “*Parteiaktien*”, die oft bessere Ergebnisse bringen als die auf die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit beruhenden Umfragen und Hochrechnungen.

*Aufgabe:* Einjährige Anleihen (“Schuldscheine” mit Rückzahlung in einem Jahr) von Rußland bringen 6% Zinsen, die als absolut sicher angesehenen Bundesanleihen (Schuldscheine von Deutschland) hingegen nur 3%. Mit welcher subjektiven Wahrscheinlichkeit wird Rußland innerhalb des nächsten Jahres zahlungsunfähig?

## 20.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten hängen im Allgemeinen vom Grad der Informiertheit bzw. von bereits eingetretenen Ereignissen ab: Dies führt auf die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = P(A, \text{ falls } B \text{ eingetreten ist})$$

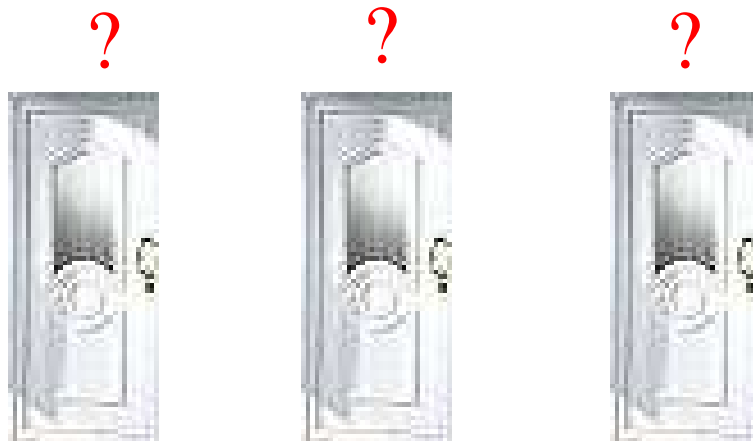
### Stochastische Unabhängigkeit

Damit erhält man auch ein Kriterium für die Unabhängigkeit zweier Ereignisse:

$$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow \begin{array}{l} P(A|B) = P(A) \text{ bzw.} \\ P(B|A) = P(B). \end{array}$$

**Hinweis:** Bei mehr als zwei Ereignissen, z.B.  $A$ ,  $B$  und  $C$ , folgt aus der Unabhängigkeit der Paare  $\{A, B\}$  und  $\{B, C\}$  *nicht* notwendigerweise die Unabhängigkeit von  $\{C, A\}$ !

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Die Fernsehshow



Der Kandidat hat zwischen sich und dem Hauptgewinn, einem Haufen Gold, nur noch drei gleich aussehende verschlossene Türen. Nur hinter einer davon steht das Gold, hinter den beiden anderen aber je ein Haufen Kies. Da keine weiteren Informationen gegeben sind, wählt der Kandidat aufs Geratewohl eine der Türen.

Ehe der Kandidat nun seine Tür öffnen kann, öffnet der Showmaster eine der beiden anderen Türen und zeigt dem Kandidaten den dahinter befindlichen Haufen Kies: "Sehen Sie, das Gold ist entweder hinter der Tür Ihrer Wahl oder hinter der dritten Tür. Ich gebe Ihnen nun die Möglichkeit, Ihre ursprüngliche Wahl zu widerrufen und anstattdessen die dritte Tür zu wählen!"

1. Wie groß ist die Gewinnchance, wenn der Kandidat bei seiner ursprünglichen Wahl bleibt?
2. Ändert der Kandidat seine Wahl? (Nehmen Sie an, dass er fit im Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ist!)
3. Wie schaut das Ganze bei einem vergesslichen Showmaster aus?
4. Variante des Spiels: Drei Verurteilte wissen, dass zwei von ihnen lange Gefängnisstrafen bekommen werden während einer freikommen wird. Einer der Verurteilten besticht einen Wärter und erhält vorab die Information, welcher seiner Kumpane mit Sicherheit ins Gefängnis muss. Ändert sich dadurch seine Chance?

## 20.6. Wahrscheinlichkeits-Regeln

### Elementartheoreme:

$$\begin{aligned}P(\{\emptyset\}) &= 0, & P(\Omega) &= 1, \\P(\bar{A}) &= 1 - P(A), \\P(A) &\leq P(B), \text{ falls } A \subset B\end{aligned}$$

### Additionstheorem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Insbesondere gilt für disjunkte Ereignisse (d.h.  $A \cap B = \{\emptyset\}$ ):  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

### Multiplikationstheorem:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Dies kann man als Kriterium für die **statistische Unabhängigkeit** nutzen (Vergleichen Sie dies mit der empirischen Unabhängigkeit der bivariaten Analyse!)

$$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

**Totale Wahrscheinlichkeit** aus bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

Hier sind die  $A_i$  (sich ausschließende) Elementarereignisse und die Summe geht über alle möglichen Elementarereignisse.

## 20.7. Der Satz von Bayes

Oft sind für Ereignisse  $A_i$  nur die

- unbedingten "**A-priori-Wahrscheinlichkeiten**"  $P(A_i)$  bekannt, sowie
- die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(B|A_i)$  dafür, dass  $A_i$  ein anderes Ereignis  $B$  nach sich zieht.

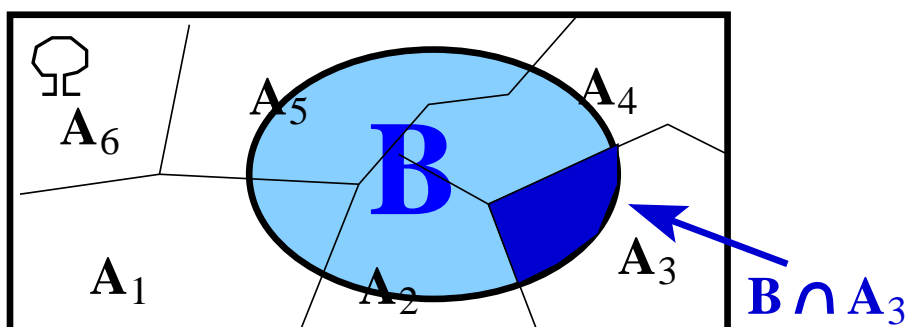
*Gesucht* sind aber die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(A_i|B)$  für das Eintreffen der Ereignisse  $A_i$ , falls  $B$  eingetroffen ist.

*Beispiel:*  $A_i$  bezeichnet das Vorhandensein (oder Nichtvorhandensein) verschiedener Krankheiten, die alle ein Symptom  $B$  verursachen. Man kennt die Wahrscheinlichkeiten  $P(B|A_i)$ , dass eine Krankheit ein Symptom verursacht und natürlich das Zutreffen ( $B$ ) oder Nichtzutreffen ( $\bar{B}$ ) des Symptoms. Man will aber die Wahrscheinlichkeiten  $P(A_i|B)$  (Krankheit  $i$ , falls Symptom  $B$ ) und  $P(A_i|\bar{B})$  (Krankheit  $i$ , falls kein Symptom  $B$ ) wissen.

Man erhält sie mit Hilfe des **Theorems von Bayes**:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Falls die  $n$  Ereignisse  $A_i$  paarweise disjunkt sind und zusammen das sichere Ereignis bilden, kann man die Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit ermitteln.

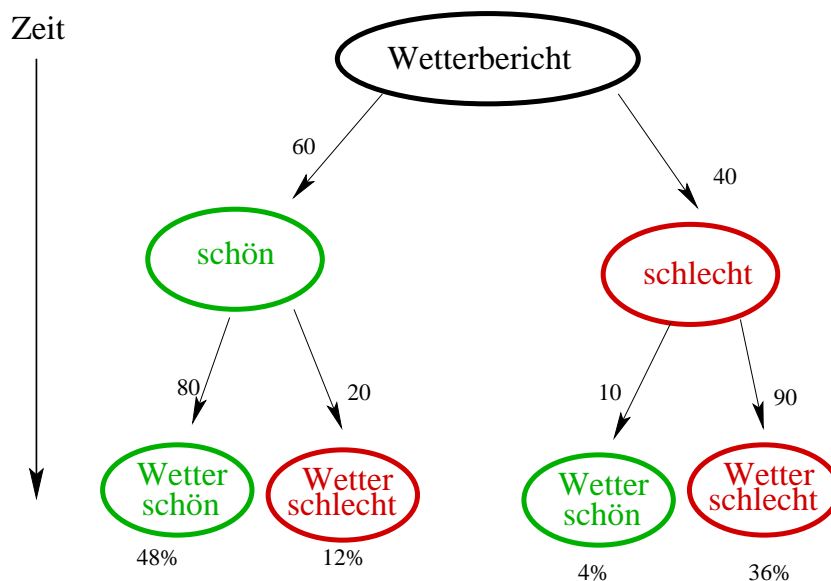


## 20.7. Satz von Bayes II: Wahrscheinlichkeitsbaum

Alternativ zur Bayes-Formel kann man Aufgaben zum Satz von Bayes auch anschaulich mit Hilfe des sogenannten **Wahrscheinlichkeitsbaumes** lösen.

*Beispiel* Im Mittel sagt der Wetterbericht für den kommenden Tag zu 60 % schönes und zu 40% schlechtes Wetter voraus; die Trefferquote liegt für die Voraussage "schön" bei 80% und für die Voraussage "schlecht" bei 90 %.

- (a) Wieviel % schöne Tage gibt es?
- (b) Heute sei schönes Wetter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautete der gestrige Wetterbericht "schön"?



An den "Ästen" des W-Baumes stehen jeweils die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Jeder "Pfad" (Durchgang vom Stamm zu den Zweigspitzen) entspricht jeweils der kombinierten Wahrscheinlichkeit, dass alle durch die Knoten definierten Ereignisse eintreffen, z.B. entspricht der linkeste Pfad der Wahrscheinlichkeit

$$P(A\hat{B}) = P(A)P(B|A) = 0.6 * 0.8 = \underline{\underline{0.48}}.$$

## 20.7. Satz von Bayes III - Aufgaben

1. Leiten Sie die Regel für die totale Wahrscheinlichkeit aus dem Additionstheorem und den Satz von Bayes aus dem Multiplikationstheorem her!
2. In einer Kfz-Zulieferfirma werden Sensoren für Airbags an drei Maschinen  $M_i, i = 1, 2, 3$  hergestellt. Maschine 1 erzeugt 50% der Produktion mit einer Fehlerrate von 1%,  $M_2$  erzeugt 30% mit einer Fehlerrate von 5% und die alte  $M_3$  erzeugt die letzten 20% mit 10% Fehlerwahrscheinlichkeit.
  - (a) Wie groß ist die totale Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Sensor defekt ist?
  - (b) In der Endkontrolle wird mal wieder ein Fehler entdeckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde er von  $M_1, M_2$  oder  $M_3$  verursacht?

**Exkurs: Bayes-Spamfilter** Eine der wichtigsten neueren Anwendungen des Satzes von Bayes. Näheres im Exkurs zu diesen Folien-satz.