

# Lösungen einiger Verständnisfragen und -aufgaben zu Kap. 26: Konfidenzintervalle

## Verständnisfrage:

Zu 26.1: Warum ist bei Punktschätzungen stetiger Größen die Trefferwahrscheinlichkeit exakt gleich 0 ?!

## Verständnisfrage:

Zu 26.2: Wie kommt man auf das in 26.2 angegebene Prognoseintervall?

## Aufgabe zu Kap. 26.2:

Die mittlere Körpergröße einer Personengruppe soll anhand einer Stichprobe auf den Wert 1.71 m überprüft werden. Formulieren Sie eine sinnvolle Fragestellung unter Verwendung der allgemeinen Definition des Konfidenzintervalls! Wie könnte man sie bei bekannten Konfidenzintervallen beantworten?

## Verständnisfrage:

Zu 26.3(b)

- (a) Warum werden in obigen Formeln  $(1 - \alpha/2)$ -Quantile von  $Z$ ,  $T$  oder  $Q$  genommen und nicht  $(1 - \alpha)$ -Quantile?
  - (b) Leiten Sie das Vertrauensintervall für den Anteilswert aus dem für den Mittelwert her.
  - (c) Zeichnen Sie den Vertrauensbereich für die Regressionsfunktion  $\hat{Y}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$  einer Zeitreihe. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Zeit  $x$  als unabhängige Variable fest gegeben ist, also keine Schwankungen aufweist und dass jeder der  $n$  Werte  $Y_i$  bei mehreren Realisierungen der Zeitreihe unabhängig von den anderen  $Y_j$  Werten mit der als bekannt angenommenen Residualvarianz  $\sigma_R^2$  schwankt.
- (a) Da man die Fehlerwahrscheinlichkeit  $\alpha$  auf beide Seiten des Intervalls aufteilen muss. Im einfachsten Fall symmetrisch: Mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha/2$  liegt der Parameter oberhalb des Vertrauensintervalls, mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha/2$  darüber.

- (b) Bei einer Stichprobe vom Umfang  $n$  aus einer sehr großen Grundgesamtheit mit Anteilswert  $\theta$  ist die Zahl  $X$  der zu diesem Anteil gezogenen "Exemplare"  $X \sim B(n, \theta)$  verteilt, die Varianz also  $\sigma_X^2 = n\theta(1 - \theta)$ . Damit ist die Varianz der relativen Häufigkeit  $f = X/n$  gegeben durch  $\sigma_f^2 = \frac{1}{n^2}\sigma_X^2 = \theta(1 - \theta)/n \approx f(1 - f)/n$ . Für hinreichend große  $n$  ist

$$Z = \frac{f - \theta}{\sigma_f}$$

standardnormalverteilt, das Prognoseintervall von  $f$  also durch  $f \in \theta \pm z_{1-\alpha/2}\sigma_f = \theta \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$  gegeben. Das Vertrauensintervall erhält man - genau wie beim Mittelwert - durch Vertauschen von  $f$  mit  $\theta$ .

- (c)

## Zu Kap. 26.4 Prognose- und Vertrauensintervalle: Abstimmung über den Klausurtermin

Am 18.12.02 wurde in der Vorlesung eine Abstimmung über den Klausurtermin durchgeführt: Von 37, die eine Meinung hatten, waren 21 für den neuen Termin (17.02.03) und 16 für den alten (12.02.03). Da eine Änderung problematisch sein kann (z.B. weil jemand sie nicht mitbekommt), wird die Klausur nur dann verlegt, wenn man aus der "Stichprobe" vom Umfang 37 signifikant schließen kann, dass der Anteilswert der Befürworter in der Grundgesamtheit (ich habe 80 Klausur-Kandidaten angenommen) größer als 50% ist. "Signifikant" soll dabei bedeuten: Mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von höchstens 5%.

**Lösung:** Zunächst Identifikation der Größen:

Stichprobenumfang	$n = 37$
Größe der Grundgesamtheit (GG)	$N = 80$
Relative Häufigkeit der Befürworter	$f = 21/37$
Zu schätzendes Merkmal der GG=Anteilswert	$\theta$
Fehlerwahrscheinlichkeit	$\alpha = 0.05$

Wir lösen die Aufgabe mit Konfidenzintervallen (man könnte auch gleichwertig die erst im neuen Jahr zu behandelnde Testtheorie nehmen):

Signifikant  $\Rightarrow$  Konfidenzintervall für  $\theta$  vollständig oberhalb 0.5.

Die Formel aus der Formelsammlung lautet:

$$\theta \in f \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

mit dem  $1 - \alpha/2 = 97.5\%$ -Quantil der Standardnormalverteilung  $z_{1-\alpha/2} = 1.96$ . Da es sich um eine "kleine" Grundgesamtheit handelt ( $n/N > 0.05$ ), muss der Korrekturfaktor für endliche Grundgesamtheiten mit berücksichtigt werden. Einsetzen aller Zahlen ergibt

$$\theta \in 0.568 \pm 1.96 * 0.0814 * 0.733 = \underline{\underline{0.568 \pm 0.117}}$$

Die untere Grenze des Konfidenzintervalls für  $\theta$  liegt also **nicht** über 0.5. Mit der vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeit von 5% kann also **nicht** gezeigt werden, dass  $\theta > 0.5$ .

**Ergebnis:** die Klausur wird *nicht* verlegt.

*Bemerkung:* Etwas schärfere Aussagen bekommt man mit “einseitigen Tests” aus der Testtheorie, die aber erst im Januar drankommen. Hier läuft es darauf heraus, dass man die gesamte Fehlerwahrscheinlichkeit von 5% an die untere Grenze “verlegen” kann und damit mit  $z_{1-\alpha}$  statt mit  $z_{1-\alpha/2}$  rechnen kann, was das Intervall etwas einengt, aber hier nicht für Signifikanz reichen würde.